

Цена симметрии для хвостатых звёзд

Михаил С. Терехов

Механико-математический факультет Московского государственного университета
Москва 119991, Ленинские Горы, МГУ.

Московский центр фундаментальной и прикладной математики.
kombox.ver.2.0@yandex.ru

Известно, что если в связном графе Γ можно удалить n вершин, так чтобы не осталось подграфов изоморфных графу K , то можно удалить не более $|V(K)| \cdot n$ вершин, образующих инвариантное относительно всех автоморфизмов графа Γ множество, так, чтобы не осталось подграфов изоморфных графу K . Мы строим бесконечное множество (связных) графов K , для которых эта оценка не является точной.

1 Введение

Рассмотрим следующую задачу.

В далёкой галактике решили провести самый большой чемпионат по чтению мыслей. Однако, по регламенту в чемпионате запрещено участвовать галактианцу, который дружит со ста или более участниками. Пусть известно, что как минимум n жителей галактики не смогут участвовать из-за этого правила. Тогда также известно, что если мы хотим сделать множество приглашённых участников инвариантным, относительно автоморфизмов «графа дружбы», то получится не приглашать не более $101n$ галактианцев.

Более общий подход к данной задаче, заключён в следующей теореме.

Теорема KL [KlLu21]. Пусть группа G действует на множестве U и $\mathcal{F}$ — G -инвариантное семейство конечных подмножеств множества U , мощности которых ограничены в совокупности, а X в U — конечная система представителей для этого семейства (то есть $X \cap F \neq \emptyset$, для всех $F \in \mathcal{F}$). Тогда найдётся G -инвариантная система представителей Y такая, что $|Y| \leq |X| \max_{F \in \mathcal{F}} |F|$.

Слово *семейство* здесь понимается как неупорядоченное семейство, то есть $\mathcal{F}$ — это просто некоторое множество подмножеств множества U . Инвариантность семейства $\mathcal{F}$ следует понимать естественным образом: $gF = \{gf \mid f \in F\} \in \mathcal{F}$ для всех $g \in G$ и $F \in \mathcal{F}$.

Из теоремы KL легко получается наш случай для графов.

Следствие KL [KlLu21]. Пусть Γ — граф и K — конечный граф. Тогда, если в графе Γ можно выбрать конечное множество вершин X так, чтобы каждый подграф графа Γ , изоморфный графу K , имел хотя одну вершину из X , то в графе Γ можно выбрать конечное множество вершин Y , инвариантное относительно всех автоморфизмов графа Γ , так, чтобы опять каждый подграф графа Γ , изоморфный графу K , имел хотя одну вершину из Y , причём $|Y| \leq |X| \cdot (\text{число вершин графа } K)$.

Здесь слово *граф* мы понимаем как неориентированный граф без петель и кратных рёбер. В работе [KlLu21] был поставлен вопрос:

Верно ли, что оценка неулучшаемая для каждого конкретного графа K ?

Ответ да, в общем случае [KlLu21], но отрицательный, если потребовать связность графа G . В работе [T22] был получен первый пример графа K , для которого оценка не является точной. Мы же строим бесконечный класс связных графов, для которых оценка не является точной. При этом в процессе доказательства возникла лемма (о плотных окрестностях), имеющая самостоятельный интерес ¹.

Нам потребуется доказать (доказательство приведено в последнем параграфе) некоторое усиление теоремы KL (в следующей теореме обратный бесконечному кардиналу считается нулём).

Теорема 1.1. Пусть группа G действует на множестве U и $\mathcal{F}$ — G -инвариантное семейство конечных подмножеств множества U , мощности которых ограничены в совокупности, а X в U — конечная система представителей для этого семейства (то есть $X \cap F \neq \emptyset$, для всех $F \in \mathcal{F}$). Пусть $F \in \mathcal{F}$ имеет непустые пересечения только с орбитами $V_1, \dots, V_n$ относительно действия G . Тогда выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^n \frac{|F \cap V_i| |X \cap V_i|}{|V_i|} \geq 1$$

Из теоремы 1.1 несложно вывести условия на граничные случаи.

Следствие 1.2. Пусть группа G действует на множестве U и $\mathcal{F}$ — G -инвариантное семейство конечных подмножеств множества U , мощности которых ограничены в совокупности, а X в U — минимальная по количеству элементов конечная система представителей для этого семейства. Пусть X имеет непустые пересечения только с орбитами $V_1, \dots, V_n$ относительно действия G .

Тогда

0) $|V_i| < \infty$ для всех i .

А если существует минимальное G -инвариантное множество Y , являющееся системой представителей $\mathcal{F}$ такое, что $|Y| = |X| \max_{F \in \mathcal{F}} |F|$ верно следующее:

1) Для любой орбиты V_i выполнено $|V_i| = \max_{F \in \mathcal{F}} |F| \cdot |X \cap V_i|$.

2) $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_i$.

3) Для любой орбиты V_i найдётся $F \in \mathcal{F}$, такое что $F \subseteq V_i$.

Выражаю благодарность А.А. Клячко, за ценные замечания. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 22-11-00075.

¹А. А. Клячко сообщил автору, что близкий, но менее общий, результат был доказан недавно в [SX25].

2 Симметрии на графе

Вершинной представительностью $\Upsilon_v(K, \Gamma)$ графа K в графе Γ называют [KlLu21] минимальное число n такое, что в графе Γ найдётся множество вершин X мощности n , удовлетворяющее следующему условию:

каждый подграф графа Γ , изоморфный K , содержит вершину из X . (*)

Симметричной вершинной представительностью $\Upsilon_v^{\text{sym}}(K, \Gamma)$ графа K в графе Γ называют [KlLu21] минимальное число n такое, что в графе Γ найдётся инвариантное относительно всех автоморфизмов множество вершин X мощности n с условием (*).

Граф K называют [KlLu21] *вершинно дорогим*, если

$$\forall m \in \mathbb{Z} \text{ найдётся граф } \Gamma_m \text{ такой, что } \Upsilon_v^{\text{sym}}(K, \Gamma_m) = \Upsilon_v(K, \Gamma_m) \cdot (|V(K)|) \geq m. (**)$$

Из следствия KL видно, что $\Upsilon_v^{\text{sym}}(K, \Gamma_m) \leq \Upsilon_v(K, \Gamma_m) \cdot (|V(K)|)$.

Взяв в качестве Γ_m объединение m полных графов $K_{V(K)}$, видно, что любой связный граф K является вершинно-дорогим.

Вершинно дорогой граф K называют [KlLu21] *дорогим в классе графов $\mathcal{K}$* , если графы Γ_m в (**) могут выбраны из класса $\mathcal{K}$.

Определение. Орбитой $V(v)$ вершины v графа G назовём $\{gv | g \in \text{Aut}(G)\}$.

Определение. Граф, индуцированный некоторым подмножеством V из множества вершин графа G обозначим $G(V)$.

Пусть Γ и K некоторые графы, будем говорить, что множество вершин $M(K) \subseteq V(\Gamma)$ *отмечено* в Γ , если любой подграф, изоморфный графу² K , содержащийся в Γ имеет хотя бы одну вершину из $M(K)$.

Аналогично, будем говорить, что множество вершин $M_{\text{sym}}(K) \subseteq V(\Gamma)$ *симметрично отмечено* в Γ , если множество M_{sym} является $\text{Aut}(\Gamma)$ -инвариантным и любой подграф K , содержащийся в Γ имеет хотя бы одну вершину из $M_{\text{sym}}(K)$.

Будем говорить, что орбита V *пересекается* с K , если существует $K \subseteq \Gamma$, что $|V \cap K| > 0$.

Утверждение 2.1. Пусть G и K – некоторые графы, причём $\Upsilon_v^{\text{sym}}(K, \Gamma) = |V(K)| \cdot \Upsilon_v(K, \Gamma)$, $M(K) \subseteq V(\Gamma)$ – некоторое покрытие Γ с условием $|M(K)| = \Upsilon_v(K, \Gamma)$, тогда для любой орбиты V графа Γ выполнено: если V пересекается с K , то $\frac{|V \cap M(K)|}{|V|} = \frac{1}{|K|}$, иначе $\frac{|V \cap M(K)|}{|V|} = 0$.

Доказательство. Если V не пересекается с K , то доказывать нечего. Если V пересекается с K , то из пункта 2) Следствия 1.2 видно, что $|V \cap M(K)| > 0$, откуда из пункта 1) следствия 1.2 получаем, что $|V| = |K| \cdot |V \cap M(K)|$.

Теорема 2.2. Пусть G – связный граф, K – связный граф, имеющий висячую вершину, причём $|K| \cdot \Upsilon(G, K) = \Upsilon_{\text{sym}}(G, K) > 0$. Тогда для любой орбиты V графа G выполнено $G(V) \supseteq K$.

Доказательство. В самом деле, пусть все орбиты графа G это $V_1, \dots, V_n, U_1, \dots, U_m$, где орбиты V_i пересекаются с K , а орбиты U_j не пересекаются с K . Тогда из пункта 3) Следствия 1.2 получаем, что все орбиты, которые пересекаются с K должны содержать K . В силу связности графа G найдутся орбиты V_i и U_j , между которыми есть ребро в графе G . Пусть K_0 получается из графа K удалением висячей вершины. Рассмотрим некоторый K_0 из $G(V_i)$ и ребро дополняющее K_0 до K идущее из V_i в орбиту U_j , получаем, что K пересекается с U_j . $\square$

²Далее слова „изоморфный графу“ будем опускать, если это не вызывает путаницы.

Определение Окрестностью вершины v в графе G назовём индуцированный подграф графа G , состоящий из всех вершин, смежных v и всех рёбер, соединяющих две такие вершины.

Лемма о плотных окрестностях. *Не существует непустього графа G , такого, что степень каждой вершины графа равна n и окрестность каждой вершины v графа G содержит $\frac{n(n-1)}{2} - p_v$ рёбер, где $1 \leq p_v < \frac{n}{2}$, причём p_v может быть разным для разных вершин.*

Доказательство. Пусть G – контрпример. Пусть v – некоторая вершина. $O(v)$ её окрестность. Обозначим степень вершины w в подграфе $O(v)$ через $\deg_{O(v)}(w)$. Назовём антистепенью вершины $w \in O(v)$ число $\overline{\deg}_{O(v)}(w) := (n-1) - \deg_{O(v)}(w)$. Тогда сумма антистепеней вершин из $O(v)$ равна $2p_v$, где $2 \leq 2p_v \leq n-1$. Рассмотрим вершину w максимальной антистепени $\overline{\deg}_{O(v)}(w)$ в $O(v)$. Пусть $\overline{\deg}_{O(v)}(w) = k > 0$. Очевидно, что $\overline{\deg}_{O(w)}(v) = \overline{\deg}_{O(v)}(w)$, тогда в $O(w)$ есть хотя бы k вершин $w_1, w_2, \dots, w_k$: $\overline{\deg}_{O(w)}(w_i) = 0$ (то есть соединённых со всеми вершинами из $O(w)$), иначе суммарная антистепень вершин из $O(w)$ была бы не меньше, чем $1 \cdot k + (k-1) \cdot 0 + (n-1-(k-1)) \cdot 1 = n > 2p_w$. Эти вершины $w_1, w_2, \dots, w_k$ могут лежать только внутри $O(v) \cap O(w)$ так как $v \in O(w)$, а v соединена только с $O(v)$. Тогда вершины $w_1, w_2, \dots, w_k$ не соединены с $O(v) \setminus O(w)$ так как все рёбра из них уже ведут в w и $O(w)$. Но тогда каждая вершина $u \in O(v) \setminus (O(w) \cup w)$ не соединена с $w, w_1, w_2, \dots, w_k$, а значит $\overline{\deg}_{O(v)}(u) \geq k+1 > \overline{\deg}_{O(v)}(w)$, что противоречит максимальной антистепени вершины w в $O(v)$. $\square$

Определение. *Полный граф на n вершинах обозначим K_n .*

Определение. *Граф, получаемый добавлением вершины и ребра, соединяющего её с n вершинами графа K_n назовём звездой с хвостом и обозначим sr_d .*

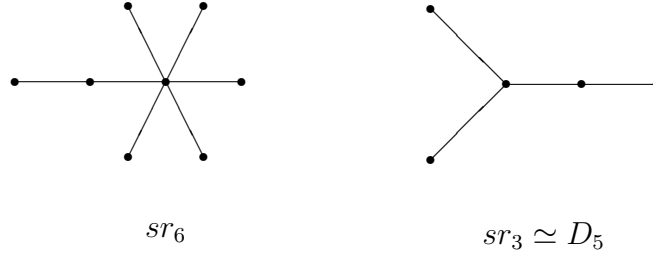


Рис. 1

Определение. *Граф на n вершинах со степенью каждой вершины $n-2$ обозначим K'_n .*

Теорема о симметризации систем весовых представителей [KIT25]. Пусть группа G действует на множестве U , $W \subset \mathbb{Q}$ – конечное множество (весов), и $\mathcal{F}$ – G -инвариантное семейство неотрицательных (весовых) функций $F : U \rightarrow W$ с конечным носителем (где G -инвариантность означает, что для каждой функции $F \in \mathcal{F}$ и каждого $g \in G$ функция $u \rightarrow F(g \circ u)$ также лежит в $\mathcal{F}$). Пусть $X \subseteq U$ конечная система весовых представителей для этого семейства, то есть $\sum_{x \in X} F(x) \geq 1$ для любого $F \in \mathcal{F}$. Тогда найдётся G -инвариантная система весовых представителей $Y \subseteq U$ такая, что

$$|Y| \leq |X| \cdot \max_{F \in \mathcal{F}} \sum_{u \in U} F(u).$$

При этом в качестве Y можно взять объединение всех G -орбит $G \circ u$ таких, что выполнено $|G \circ u \cap X| \cdot \max_{F \in \mathcal{F}} \sum_{u \in U} F(u) \geq |G \circ u|$.

Утверждение 2.3. *Единственный вершинно-транзитивный связный граф G со свойством $|sr_d| \cdot \Upsilon(G, sr_d) = \Upsilon_{sym}(G, sr_d) > 0$, где $d \geq 3$ нечётно — K_{d+2} .*

Существует только 2 вершинно-транзитивных связных графа G со свойством $|sr_d| \cdot \Upsilon(G, sr_d) = \Upsilon_{sym}(G, sr_d) > 0$, где $d \geq 3$ чётно — K_{d+2} и K'_{d+2}

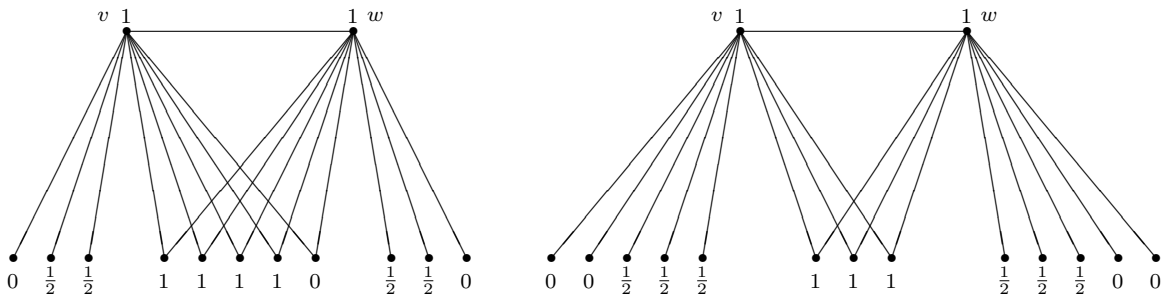
Доказательство. Пусть G — потенциальный контрпример. Пусть в графе G ровно n вершин, а степень каждой вершины равна $k \geq d$. Тогда

1) k нечётно.

Тогда по лемме о плотных окрестностях либо G является K_{k+1} , либо у каждой вершины v есть соединённая с ней вершина w , такая что $|O(v) \setminus (O(w) \cup w)| = |O(w) \setminus (O(v) \cup v)| > 1$. В самом деле, в $O(v)$ отсутствует хотя бы $\frac{k}{2}$ рёбер, и в силу чётности найдётся вершина из $O(v)$ которая не соединена хотя бы с двумя вершинами из $O(v)$.

Введём на индуцированном вершинами $O(v) \cup O(w)$ графе одну весовую функцию F :

$$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \{v, w\}, \\ 1, & \text{если } x \in O(v) \cap O(w), \text{ но не более } (d-3) \text{ вершин} \\ 0, & \text{если } x \in O(v) \cap O(w), \text{ начиная с } (d-2)\text{-й вершины} \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x \in O(v) \setminus (O(w) \cup w), \text{ но не более } (d-1 - \min(d-3, |O(v) \cap O(w)|)) \text{ вершин} \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x \in O(w) \setminus (O(v) \cup v), \text{ но не более } (d-1 - \min(d-3, |O(w) \cap O(v)|)) \text{ вершин} \\ 0, & \text{для всех остальных вершин.} \end{cases}$$



$$k = 9, d = 7$$

Тогда суммарный вес F будет $d+1$, причём любое множество вершин X , являющееся системой представителей для sr_d , будет весовой системой представителей для семейства функций $\mathcal{F} := \{\text{все автоморфные образы } F\}$. Тогда по теореме о симметризации систем весовых представителей, существует симметричное множество весовых представителей, не более чем в $d+1$ раз большее, чем количество представителей sr_d . Однако, единственное симметричное множество в вершинно-транзитивном графе это все вершины (и пустое множество). Значит, $|X| \geq \frac{V(G)}{d+1}$, противоречие.

2) k чётно.

Тогда случай, при котором у каждой вершины v есть соединённая с ней вершина w , такая что $|O(v) \setminus (O(w) \cup w)| = |O(w) \setminus (O(v) \cup v)| > 1$. Рассматривается аналогично. Случай, при котором $G \simeq K_{k+1}$ тоже понятен. Осталось рассмотреть случай, в котором у каждой вершины v окрестность изоморфна K'_k . То есть отсутствующие рёбра разбивают вершины из $O(v)$ на пары. Несложно понять, что это возможно только когда в графе $k + 2$ вершины. Причём сам граф является K'_{k+2} . Действительно, рассмотрим некоторую вершину w отличную от v и $O(v)$, из которой идёт ребро в вершину $u \in O(v)$. Окрестность w должна быть изоморфна K'_k , а значит u должна быть соединена со всеми вершинами из этой окрестности, кроме не более, чем одной. Однако, все рёбра из u уже известны, а значит $|O(w) \cap O(v)| \geq k - 1$. По аналогичным причинам, последняя вершина из $O(w)$ лежит в $O(v)$. Но тогда в графе K'_{k+2} требуется отметить хотя бы $k - d + 1$, вершину, что возможно только при случае K'_{d+2} .

Лемма 2.2 [Т22]. Пусть между некоторыми орбитами A и B есть хотя бы одно ребро, и $S_1 \subseteq A$ — некоторое подмножество вершин. Тогда для множества вершин $S_2 \subseteq B$, связанных хотя бы одним ребром с множеством S_1 , выполнено неравенство $|S_2| \geq |S_1| \frac{|B|}{|A|}$.

Теорема 2.4. Для $n \geq 3$ не существует связного графа Γ , такого, что выполнено:

$$\Upsilon_v^{\text{sym}}(sr_n, \Gamma) = (n + 2)\Upsilon_v(sr_n, \Gamma) > n + 2.$$

Доказательство. Из Утверждения 2.3 следует, что в графе Γ хотя бы две орбиты A, B причём в силу связности можно выбрать такие, что между ними есть хотя бы одно ребро. Из теоремы 2.2 следует, что все орбиты содержат sr_n , а значит, по утверждению 2.3 являются объединением графов K изоморфных K_{n+2} или K'_{n+2} . Пусть X — минимальная система представителей для sr_n , тогда по утверждению 2.1 $|A \cap X| = \frac{|A|}{n+2}$. Это означает, что для каждого графа K из орбиты A выполнено $|X \cap K| = 1$. Но тогда существует $|A \setminus X| \geq |A| \frac{n+1}{n+2}$ вершин, к которым можно добавить висячее ребро и получился граф содержащий sr_n . Откуда следует, что $X \supset \{ \text{вершины орбиты } B, \text{ связанные хотябы одним ребром с } A \setminus X \}$, но таких вершин по лемме 2.2 будет хотя бы $|B| \frac{n+1}{n+2}$, что невозможно, так как $|B \cap X| = \frac{|B|}{n+2}$. $\square$

Следствие 2.5. Для $n \geq 3$ граф sr_n не является дорогим в классе связных графов.

3 Доказательства теоремы 1.1 и следствия 1.2

Доказательство теоремы 1.1 почти дословно повторяет доказательство [KlLu21].

Доказательство. Возьмём какое-то множество $F \in \mathcal{F}$. Каждое множество gF (где $g \in G$) принадлежит $\mathcal{F}$ в силу инвариантности семейства $\mathcal{F}$ и, следовательно, пересекается с X . Значит,

$$G = \bigcup_{f \in F} \{g \in G \mid gf \in X\}.$$

Каждое из множеств $\{g \in G \mid gf \in X\}$ является либо пустым, либо объединением конечного числа левых смежных классов группы G по стабилизатору $St(f)$ точки f :

$$\begin{aligned} \{g \in G \mid gf \in X\} &= \bigcup_{x \in X} \{g \in G \mid gf = x\} = \\ &= \bigcup_{x \in X \cap Gf} g_x \cdot St(f), \text{ где } g_x \in G \text{ фиксированы так, что } g_x f = x. \end{aligned} \quad (1)$$

Таким образом, мы получили разложение группы G в конечное объединение левых смежных классов по некоторым подгруппам. Воспользуемся теперь теоремой Б. Неймана [Neu54] (утверждение 4.5): если группа G покрывается конечным числом смежных классов по некоторым подгруппам: $G = g_1 G_1 \cup \dots \cup g_s G_s$, то $\sum \frac{1}{|G : G_i|} \geq 1$. Следовательно, (учитывая то, что индекс стабилизатора равен длине орбиты) мы получаем

$$1 \leq \sum_{f \in F} \frac{1}{|G : St(f)|} \cdot |Gf \cap X| = \sum_{f \in F} \frac{|Gf \cap X|}{|Gf|} = \sum_{i=1}^n \sum_{f \in F \cap V_i} \frac{|Gf \cap X|}{|Gf|} = \sum_{i=1}^n \frac{|F \cap V_i| |X \cap V_i|}{|V_i|}.$$

Теперь докажем следствие 1.2

Доказательство.

0) Возьмём какое-то множество $F \in \mathcal{F}$. Пусть $F = F_1 \sqcup F_2$, где F_1 – элементы, принадлежащие конечным орбитам, а F_2 – бесконечным. Аналогично (1) из теоремы 1.1 получаем разложение группы G в конечное объединение левых смежных классов по некоторым подгруппам. Воспользуемся теперь теоремой Б. Неймана [Neu54] (утверждение 4.4): Если группа покрыта конечным числом смежных классов по подгруппам, то все смежные классы по подгруппам бесконечного индекса можно из этого покрытия выбросить, и оно всё равно останется покрытием.

$$\begin{aligned} G &= \bigcup_{f \in F} \bigcup_{x \in X \cap Gf} g_x \cdot St(f) = \bigcup_{f \in F_1} \bigcup_{x \in X \cap Gf} g_x \cdot St(f) = \\ &= \bigcup_{f \in F_1} \bigcup_{x \in X} \{g \in G \mid gf = x\} = \bigcup_{f \in F_1} \{g \in G \mid gf \in X\}. \end{aligned}$$

Из принадлежности единицы группы G последнему множеству получаем, что $f = ef \in X$ для некоторого $f \in F_1$. Откуда следует, что $|X \cap F_1| > 0$, а это значит, что отбросив элементы X из бесконечных орбит мы по-прежнему получаем систему представителей.

1) Пусть $M := \max_{F \in \mathcal{F}} |F|$. Из теоремы о симметризации систем весовых представителей найдется симметричная система представителей Y' , такая, что для каждой орбиты V выполнено $|Y' \cap V| \leq M \cdot |X \cap V|$. Тогда $M \cdot |X| = |Y| \leq |Y'| \leq M \cdot |X|$, откуда следует, что все неравенства обращаются в равенство.

2) Рассмотрим некоторый $F \in \mathcal{F}$ и подставим равенство из пункта 1) в теорему 1.1

$$1 \leq \sum_{i=1}^n \frac{|F \cap V_i| |X \cap V_i|}{|V_i|} = \sum_{i=1}^n \frac{|F \cap V_i|}{M} \leq 1$$

Откуда следует утверждения пункта 2).

3) Пусть орбита V_1 не содержит никакой $F \in \mathcal{F}$. Тогда из утверждения пункта 2) легко видеть, что $Y' := \bigcup_{i=2}^n V_i$ является симметричной системой представителей. Применяя пункт 1) получаем, $|Y| \leq |Y'| < |\bigcup_{i=1}^n V_i| = M \cdot |\bigcup_{i=1}^n (X \cap V_i)| = M \cdot |X|$. Противоречие.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [KlLu21] A. A. Klyachko, N. M. Luneva, Invariant systems of representatives, or The cost of symmetry, Discrete Mathematics, 344:6 (2021), 112361. См. также arXiv:1908.03315.
- [KIT25] Klyachko, A.A., Terekhov, M.S. Invariant systems of weighted representatives. J Algebr Comb 61, 32 (2025). <https://doi.org/10.1007/s10801-025-01400-y>
- [Neu54] B.H. Neumann, Groups covered by permutable subsets, J. London Math. Soc., s1-29:2 (1954), 236-248.
- [SX25] N. S. Sheffield, Z. Xi, Graphs with the same edge count in each neighborhood, arxiv.org/abs/2507.14473, 2025.
- [T22] М.С. Терехов, Цена симметрии в связных графах, Мат. заметки, 112:6 (2022), 895-902. См. также arXiv:2202.09590